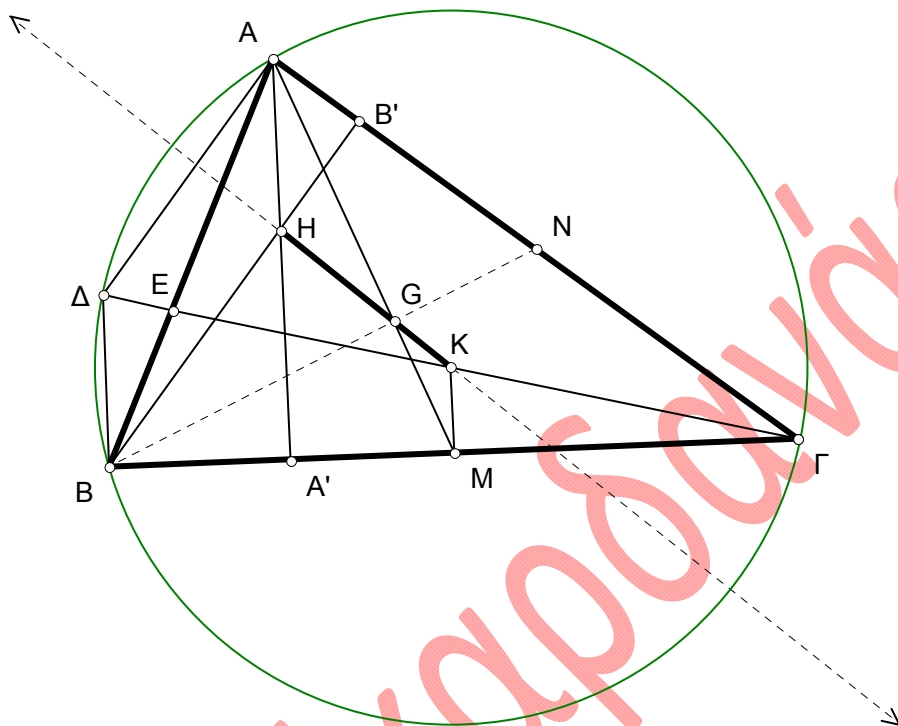


Θεώρημα της ευθείας του Euler

Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ το ορθόκεντρο, το βαρύκεντρο και το περίκεντρο βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία. (Ευθεία του Euler)



Απόδειξη:

Περιγράψουμε τον κύκλο K στο τρίγωνο $AB\Gamma$ και παίρνουμε Δ το αντιδιαμετρικό του Γ . Επειδή η $\Gamma\Delta$ είναι διάμετρος θα είναι $\widehat{\Delta B\Gamma} = 90^\circ$ άρα θα είναι $\Delta B \parallel AA'$ και για τον ίδιο $\Delta A \parallel BB'$. Επομένως το τετράπλευρο $A\Delta B\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο. Εξ άλλου το K είναι μέσο της $\Gamma\Delta$ και το M της $B\Gamma$ άρα θα ισχύει $KM = \frac{1}{2}\Delta B = \frac{1}{2}AH$. Έχουμε όμως $MG = \frac{1}{2}GA$ (G : βαρύκεντρο) κατά συνέπεια τα τρίγωνα AHG και MKG θα έχουν δυο πλευρές ανάλογες $\frac{KM}{AH} = \frac{GM}{GA}$ και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες $\widehat{KMG} = \widehat{HAG}$ ως εντός εντός εναλλάξ. Άρα τα τρίγωνα είναι όμοια επομένως θα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία και έτσι GK, GH αντικείμενες αφού AGM ευθεία. Άρα τελικώς K, G, H συνευθειακά και μάλιστα $GH=2GK$. Η ευθεία HK λέγεται ευθεία του Euler.