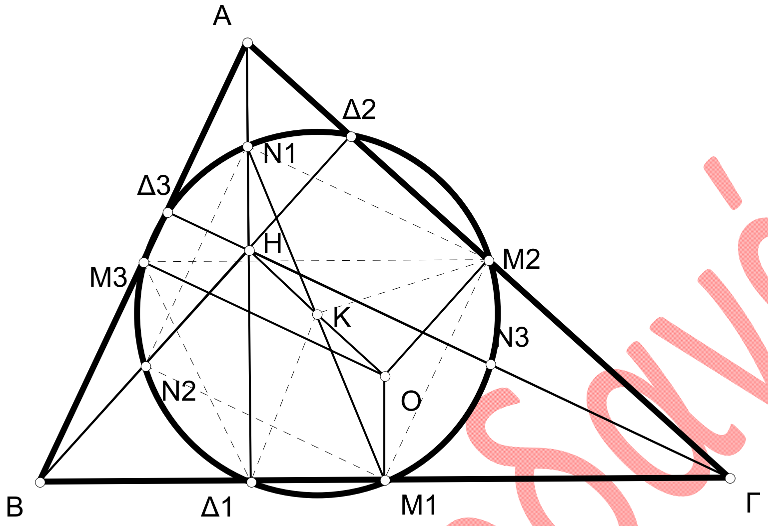
Θεώρημα της κύκλου του Euler

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ, τα μέσα των τριών πλευρών, τα ίχνη των τριών υψών και τα μέσα των αποστάσεων του ορθοκέντρου από τις κορυφές, είναι σημεία ομοκυκλικά. (Κύκλος του Euler)



Απόδειξη:

Θεωρούμε τα τρία μέσα των πλευρών M_1, M_2, M_3. Αυτά ορίζουν ένα κύκλο Κ. Θεωρούμε και το ίχνος $Δ_1$ του ύψους $ΑΔ_1$. Το τετράπλευρο $Δ_1M_1M_2M_3$ θα είναι τραπέζιο και μάλιστα ισοσκελές διότι $M_2M_3 \parallel ΒΓ$, $M_1M_2 \parallel= \frac{1}{2}AB$ και από το ορθογώνιο $Δ_1ΑΒ$ η διάμεσος $Δ_1M_3 = \frac{1}{2}AB$ Άρα το $Δ_1$ βρίσκεται στον ίδιο κύκλο Κ. Για τους ίδιους λόγους και τα $Δ_2$ και $Δ_3$ θα βρίσκονται στον ίδιο κύκλο Κ.

Θεωρούμε τώρα τα N_1,N_2 και N_3 μέσα των ΑΗ, ΒΗ, και ΓΗ αντίστοιχα. Επομένως $N_1H \parallel= OM_1$ (βλ. ευθεία του Euler) και αν υποθέσουμε ότι Λ είναι το μέσο του M_1N_1 θα ισχύουν $ΛM_1 = ΛN_1 = ΛΔ_1$ (1) από το ορθογώνιο τρίγωνο $Δ_1M_1N_1$. Από την άλλη το τετράπλευρο $M_1M_2N_1N_2$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο άρα θα ισχύουν $ΛM_1 = ΛN_1 = ΛM_2 = ΛN_2$ (2). Από (1) και (2) συνάγεται ότι $ΛM_1 = ΛM_2 = ΛΔ_1$ άρα το Λ συμπίπτει με το Κ επομένως το N_1 θα βρίσκεται στον κύκλο Κ. Ομοίως και τα N_2 και N_3.