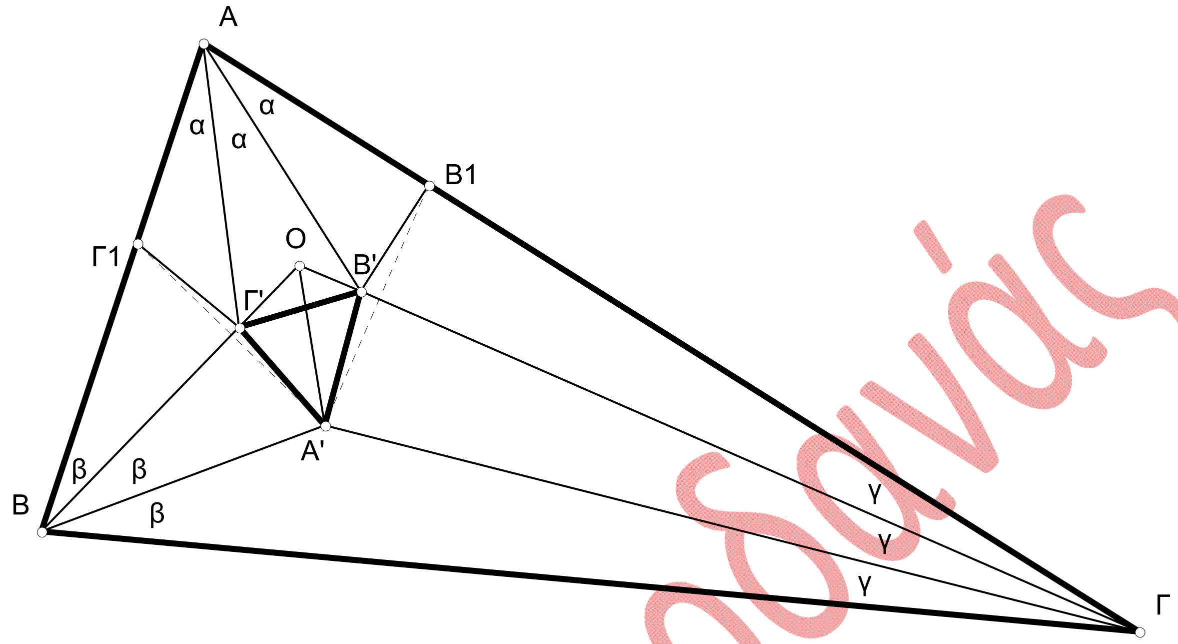
Θεώρημα του Morley

Οι τριχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου τέμνονται σε σημεία που είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.



Απόδειξη:

Θεωρούμε το τρίγωνο ΑΒΓ και τις τριχοτόμους ΒΟ, ΒΑ', ΓΑ', ΓΟ, των γωνιών Β και Γ. Επιπλέον φέρουμε την ΟΑ'. Στο τρίγωνο ΟΒΓ οι ΒΑ' και ΓΑ' είναι διχοτόμοι άρα το Α' είναι έκκεντρο επομένως η ΟΑ' είναι διχοτόμος. Κατασκευάζουμε τα Α'Γ' και Α'Β' εκατέρωθεν του Α'Ο ώστε να σχηματίζουν γωνίες $\widehat{OA'\Gamma'} = \widehat{OA'B'} = 30^\circ$ *και προσδιορίζουμε τα* Γ_1 *και* B_1 *συμμετρικά του Α' ως προς ΒΟ και ΓΟ αντίστοιχα.*

Τα τρίγωνα ΟΑ'Γ' και ΟΑ'Β' έχουν την ΟΑ' κοινή και τις προσκείμενες της γωνίες ίσες, άρα είναι ίσα επομένως $A'B' = A'\Gamma'$ *με* $\widehat{\Gamma'A'B'} = 60^\circ$ *δηλαδή το τρίγωνο Α'Β'Γ' είναι ισόπλευρο. Για να δείξουμε ότι είναι το τρίγωνο Morlay αρκεί να δείξουμε ότι οι ΑΒ' και ΑΓ' τριχοτομούν τη γωνία Α.*

$$\widehat{B'O\Gamma'} = 180^\circ - 2\beta - 2\gamma \Rightarrow \widehat{A'OB'} = 90^\circ - \beta - \gamma \Rightarrow \widehat{OB'A'} = 180^\circ - \widehat{A'OB'} - 30^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{OB'A'} = 150^\circ - \left(90^\circ - \beta - \gamma\right) \Rightarrow \widehat{OB'A'} = 60^\circ + \beta + \gamma = 60^\circ + \frac{180^\circ - 3\alpha}{3}$$

$$= 60^\circ + 60^\circ - \alpha = 120^\circ - \alpha.$$

$$\widehat{B_1B'\Gamma'} = 2\cdot\widehat{A'B'O} - 60^\circ = 2\cdot\left(120^\circ - \alpha\right) - 60^\circ = 240^\circ - 2\cdot\alpha - 60^\circ = 180^\circ - 2\cdot\alpha$$

$= 2\left(90^\circ - \alpha\right) = 2\overline{\alpha}$, *όπου* $\overline{\alpha}$ *η συμπληρωματική της α. Με όμοιο τρόπο* *καταλήγουμε* $\widehat{B'\Gamma'\Gamma_1} = 2\overline{\alpha}$. *Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο* $\Gamma_1\Gamma'B'B_1$ *είναι ισοσκελές τραπέζιο άρα εγγράψιμο σε κύκλο C.*

Κάθε μια από τις χορδές $\Gamma_1\Gamma'B'$ *και* $\Gamma'B'B_1$ *είναι χορδή τόξου* $2\overline{\alpha}$ *άρα και χορδή του παραπληρωματικού του 2α. Συνεπώς το Α βρίσκεται στον κύκλο C και επειδή οι χορδές* $\Gamma_1\Gamma'$, $\Gamma'B'$, $B'B_1$ *είναι ίσες, οι ΑΒ' και ΑΓ' τριχοτομούν τη γωνία* $\hat{A} = 3\alpha$.