Ηλίας Σκαρδανάς

Τα Πλατωνικά Στερεά που υπάρχουν είναι ακριβώς πέντε!

Απόδειξη

Έστω ένα τυχαίο Πλατωνικό στερεό με Ε – έδρες και Κ – κορυφές.

Εξ ορισμού κάθε έδρα είναι κανονικό πολύγωνο με λ – πλευρές, του οποίου κάθε γωνία έχει μέτρο $\omega = \frac{(\lambda-2)\cdot\pi}{\lambda}\text{rad}$.

Αν σε κάθε κορυφή του πολυέδρου συντρέχουν μ – έδρες, τότε το άθροισμα των επίπεδων γωνιών που βρίσκονται σ' αυτή είναι $\mu\cdot\frac{(\lambda-2)\cdot\pi}{\lambda}\text{rad}$ και αυτό δεν μπορεί να υπερβαίνει τα 2π. Επομένως

$$\mu\cdot\frac{(\lambda-2)\cdot\pi}{\lambda}<2\pi \Leftrightarrow \mu\cdot\frac{(\lambda-2)}{\lambda}<2 \Leftrightarrow \mu(\lambda-2)<2\lambda \Leftrightarrow \mu\lambda-2\mu-2\lambda<0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mu\lambda-2\mu-2\lambda+4<4 \Leftrightarrow \mu(\lambda-2)-2(\lambda-2)<4 \Leftrightarrow (\lambda-2)(\mu-2)<4$$

Τα λ και μ είναι ακέραιοι τέτοιοι ώστε:

- $\lambda \geq 3$ αφού κάθε έδρα είναι τουλάχιστον τρίγωνο.
- $\mu \geq 3$ αφού σε κάθε κορυφή του στερεού έχουμε τουλάχιστον τρίεδρη γωνία.

Άρα θα έχω:

λ	**μ**	$(\lambda-2)(\mu-2)$	**Συμπέρασμα**
3	3	1	Δεκτή λύση [3,3] : **κανονικό τετράεδρο** **(1)**
3	4	2	Δεκτή λύση [3,4] : **κανονικό οκτάεδρο** **(2)**
3	5	3	Δεκτή λύση [3,5] : **κανονικό εικοσάεδρο** **(3)**
3	6	4	Απορρίπτεται
4	3	2	Δεκτή λύση [4,3] : **κύβος** **(4)**
4	4	4	Απορρίπτεται
5	3	3	Δεκτή λύση [5,3] : **κανονικό δωδεκάεδρο** **(5)**
5	4	6	Απορρίπτεται
6	3	4	Απορρίπτεται